

Messtechnische Grundlagen und Fehlerbetrachtung

(inkl. Fehlerrechnung)

Basisgrößen des SI-Systems

Länge	Meter (m)	Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $1/299\,792\,458$ Sekunden durchläuft.
Masse	Kilogramm (kg)	Das Kilogramm ist gleich der Masse des internationalen Kilogrammprototyps.
Zeit	Sekunde (s)	Die Sekunde ist das $9\,192\,631\,770$ -fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.
Elektrische Stromstärke	Ampere (A)	Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stroms, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft 2×10^{-7} Newton hervorrufen würde.
Thermodynamische Temperatur	Kelvin (K)	Das Kelvin ist der $273,16$ te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.
Lichtstärke	Candela (cd)	Die Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz 540×10^{12} Hertz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung $1/683$ Watt durch Steradian beträgt.
Stoffmenge	Mol (mol)	Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in $0,012$ Kilogramm des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind.

Abgeleitete Einheiten

- Aus den Basiseinheiten werden weitere Einheiten abgeleitet.

Z. B.:

$$1 F = 1 \frac{As}{V}$$

- Größe = Maßzahl x Einheit

Z. B.: $C = 10\mu F$

Gesetzliche Vorsätze vor Einheiten

Hekto-	h	10^2	Dezi-	d	10^{-1}
Kilo-	k	10^3	Zenti-	c	10^{-2}
Mega-	M	10^6	Milli-	m	10^{-3}
Giga-	G	10^9	Mikro-	μ	10^{-6}
Tera-	T	10^{12}	Nano-	n	10^{-9}
Peta-	P	10^{15}	Pico-	p	10^{-12}
Exa-	E	10^{18}	Femto-	f	10^{-15}
			Atto-	a	10^{-18}

Signifikante Stellen

Die Anzahl der signifikanten Stellen gibt an, wie genau der Zahlenwert einer physikalischen Größe bekannt bzw. für ein spezielles Problem von Bedeutung ist.

Führende Nullen sind nie signifikante Stellen.

Z.B.:

1,56 -> 3 signifikante Stellen; 1,5600 -> 5 signifikante Stellen

0,0023 -> 2 signifikante Stellen; $2,30 \cdot 10^{-3}$ -> 3 signifikante Stellen

3600 kann bedeuten, dass die Zahl nur mit 2 signifikanten Stellen bekannt ist, sie kann aber auch für die exakte Zahl mit 4 signifikanten Stellen stehen. In solchen Fällen sorgt die Verwendung der wissenschaftlichen Notation für Klarheit ($3,6 \cdot 10^3$).

- Bei der Addition entspricht die Anzahl der signifikanten Stellen im Ergebnis der kleinsten Anzahl von signifikanten Stellen in den Summanden;
z. B. $1,36 + 3,221 = 4,58$
(Subtraktion entspr.)
- Bei der Multiplikation erhält man nie mehr signifikante Stellen, als einer der Faktoren hat;
z. B. $1,68 * 3,4 = 5,7$
(Division entspr.)

Auswertung von Messungen

Man könnte annehmen, dass bei der Auswertung von Messungen der „**wahre Wert**“ der Messgröße ermittelt werden kann. Diesen bekommt man jedoch nie zu Gesicht.

Man kann lediglich durch Auswertung aller in Frage kommenden Fehlerquellen den Bereich eingrenzen, in dem er liegt (**Vertrauensbereich**).

Die sich daraus ergebenden Abweichungen nennt man **Messunsicherheit**.

Fehlerangaben als ...

- **Absoluter Fehler:**
- Mögliche Abweichung des Messergebnisses nach Herstellerangaben, durch sinnvolles Abschätzen oder statistische Berechnungen.

$$\Delta l = 1mm$$

$$l = (280 \pm 1) mm$$

- **Relativer Fehler:**
- Absoluter Fehler bezogen auf Messergebnis.

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1mm}{280mm} = 3,6 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{bzw. } 3,6 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,36 \%$$

- Welche Arten von Fehlern gibt es?
- Wie kommt man an die Fehler heran?
- Wie rechnet man mit Fehlern?
- Wie gibt man das Ergebnis an?

Welche Arten von Fehlern gibt es?

- Grobe Fehler
- Systematische Fehler
- Zufällige Fehler

Grobe Fehler

Z.B. durch defekte Messgeräte, falsches Ablesen von Skalen, ungeeignete Messmethoden oder Messbedingungen, Irrtum bei der Protokollierung oder Auswertung, ...

Grobe Fehler können durch sorgfältiges Experimentieren ausgeschlossen werden.

„Unerlaubte Fehler“

Systematische Fehler

Führen zu einseitigen Abweichungen vom „wahren Wert“.

Der Messwert ist entweder immer größer oder immer kleiner als der „wahre Wert“.

Z. B. Spannungsmessung an hochohmigen Widerständen.

Systematische Abweichungen sind also prinzipiell erfassbar, oft aber schwer oder gar nicht zu erkennen, bei Wiederholung der Messung reproduzierbar und somit zumindest teilweise korrigierbar.

Zufällige Fehler

Wiederholt man Messungen an demselben Messobjekt mit demselben Messgerät unter gleichen Bedingungen, so werden sich die einzelnen Messwerte trotzdem aufgrund der unterschiedlichen statistischen Abweichung voneinander unterscheiden.

Statistische Fehler streuen „links“ und „rechts“ um den wahren Wert. (In vielen Fällen sogar symmetrisch um den wahren Wert.)

Zufällige Abweichungen sind unvermeidlich und nicht exakt erfassbar.

Sie sind einer statistischer Analyse zugänglich.

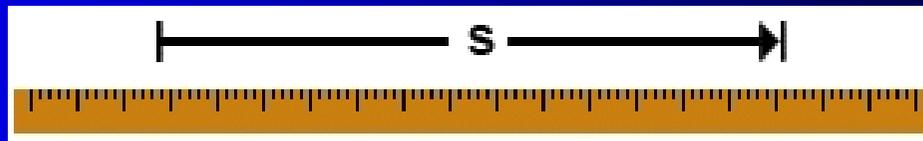
Wie kommt man an die Fehler heran?

- Angaben der Gerätehersteller

Z. B. Spannungsmessung; Messbereich 20V, Genauigkeit $\pm(0,5\% + 2Digit)$

- Sinnvolles Abschätzen

Z.B. Längenmessung
Auflösung: 1 – 0,5mm



- Statistische Auswertung

Auswerten einer Messreihe

Angaben der Gerätehersteller

Analoge Zeigerinstrumente

Sind vom Messprinzip her i. d. R. Strommesser. Bei der Messung anderer Größen sind u. U. weitere Fehler zu berücksichtigen.

Zur Fehlerangabe des Herstellers kommt noch der geschätzte Ablesefehler hinzu, der bei linearer Skalenteilung mit ca. der Hälfte des Abstandes zwischen zwei benachbarten Teilstrichen anzusetzen ist.

Der Hersteller gibt die **Genauigkeitsklasse (Gk)** an. Diese Angabe ist in % auszuwerten und **bezieht sich auf den jeweiligen Messbereichsendwert**.

Es wird empfohlen, den Messbereich so zu wählen, dass eine Anzeige im letzten Drittel der Skale zustande kommt.



Bsp.:

$$Gk := \frac{1.5}{100}$$

->1,5%

$$U_{\text{Anzeige}} := 8.50 \text{ V}$$

->Messwert

$$MB := 10 \text{ V}$$

->Messbereich

$$\Delta U := Gk \cdot MB$$

$$\Delta U = 0.15 \text{ V}$$

->absoluter Fehler

$$\frac{\Delta U}{U_{\text{Anzeige}}} = 0.018$$

$$\frac{\Delta U}{U_{\text{Anzeige}}} = 1.8\%$$

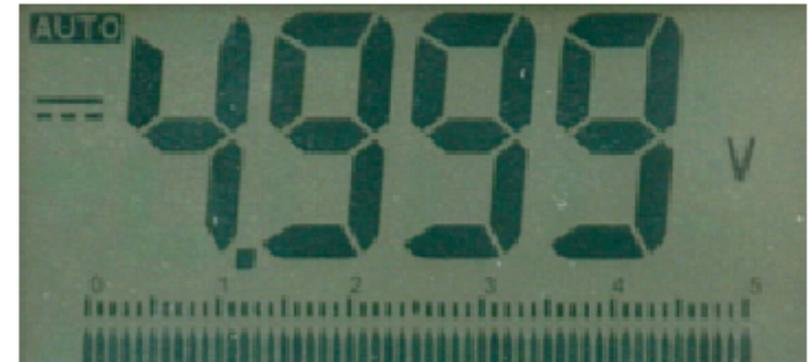
->relativer Fehler

Angaben der Gerätehersteller

Digitalmultimeter (DMM)

Sind vom Messprinzip her i. d. R. Spannungsmesser. Bei der Messung anderer Größen sind u. U. weitere Fehler zu berücksichtigen.

Die **Auflösung** (die kleinste Messgrößenänderung, die vom Gerät im jeweiligen Messbereich noch erfasst und dargestellt werden kann) hängt von der **Anzahl der verfügbaren Stellen** ab. Angaben diesbezüglich wie "3½ stellig", "4½ stellig" oder "3¾ stellig" waren nicht immer eindeutig und sind inzwischen ersetzt bzw. ergänzt worden durch die **Angabe der verfügbaren Stellen (Digits)**.



Z. B. bedeutet "3½ stellig", dass 4 Ziffern zur Verfügung stehen, von denen die letzten 3 die Werte 0..9 anzeigen können, während die erste Ziffer nur 0 bzw. 1 und das negative Vorzeichen darstellen kann. Somit ist der maximale Anzeigewert 1999. Das entspricht 2000 Digits.

Dementsprechend hätte man bei "4½ stellig" 20000 Digits.

Bei "3¾ stellig" wäre es dann schon unübersichtlich. Falls der Hersteller 4000 Digits vorgesehen hat, wären es 3 vollwertige Ziffern und eine mit 0, 1, 2 und 3 sowie Vorzeichen, falls er 5000 Digits vorgesehen hat, ...

Die **Fehlerangaben der Hersteller beziehen sich meist auf den Messwert** und geben **zusätzlich die Anzahl der "unzuverlässigen" Digits** mit an.

Bsp.:	$\pm (0,5\% + 2 \text{ Digit})$	-> Fehlerangabe bei 3½ stelligem DMM	$U_{\text{Anzeige}} := 1.355 \text{ V}$	-> Messwert	$\text{MB} := 2 \text{ V}$	-> Messbereich
	$\Delta U := \frac{0.5}{100} \cdot U_{\text{Anzeige}} + 0.002 \text{ V}$		$\Delta U = 9 \times 10^{-3} \text{ V}$			-> absoluter Fehler
	$\frac{\Delta U}{U_{\text{Anzeige}}} = 6.5 \times 10^{-3}$		$\frac{\Delta U}{U_{\text{Anzeige}}} = 0.65\%$			-> relativer Fehler

Wie rechnet man mit Fehlern?

Statistische Auswertung

- Mittelwert der Messreihe
- Empirische Standardabweichung der Messreihe
- Empirische Standardabweichung des Mittelwerts

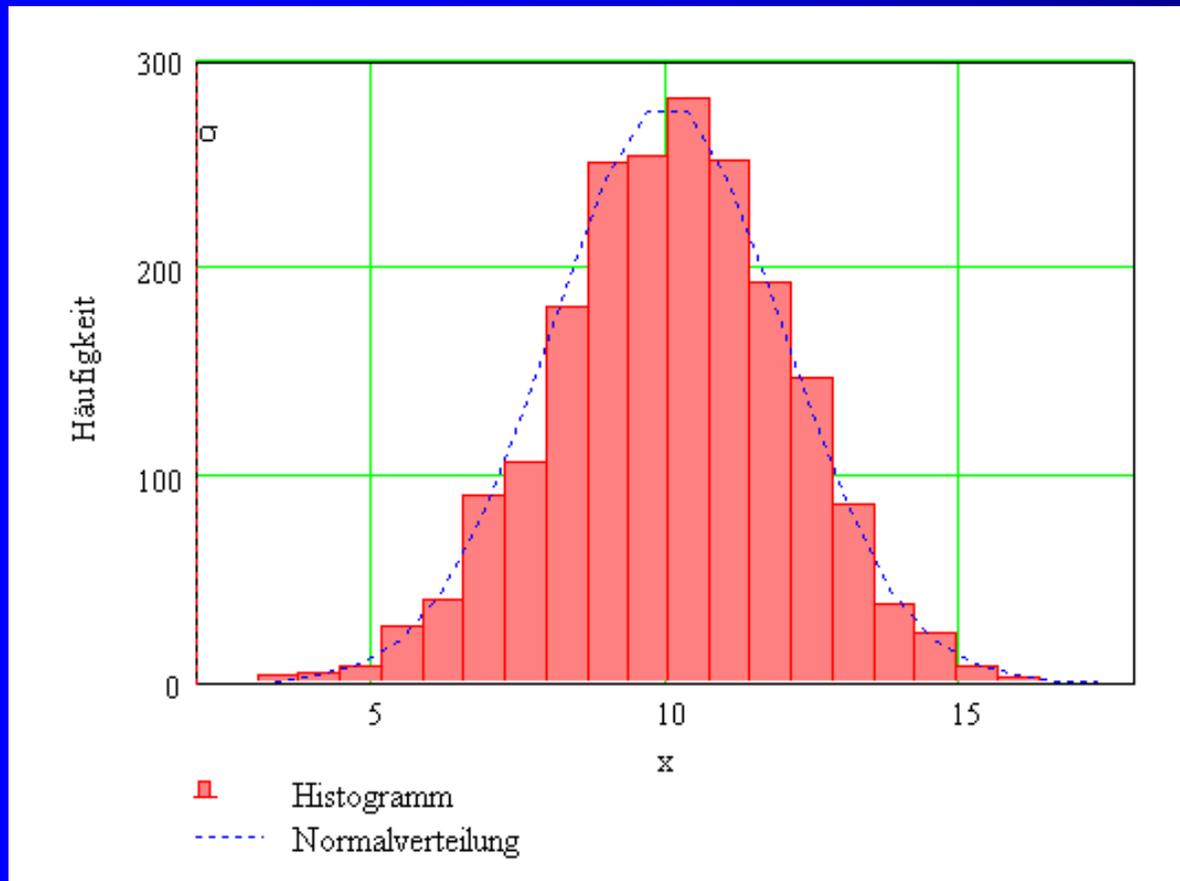
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

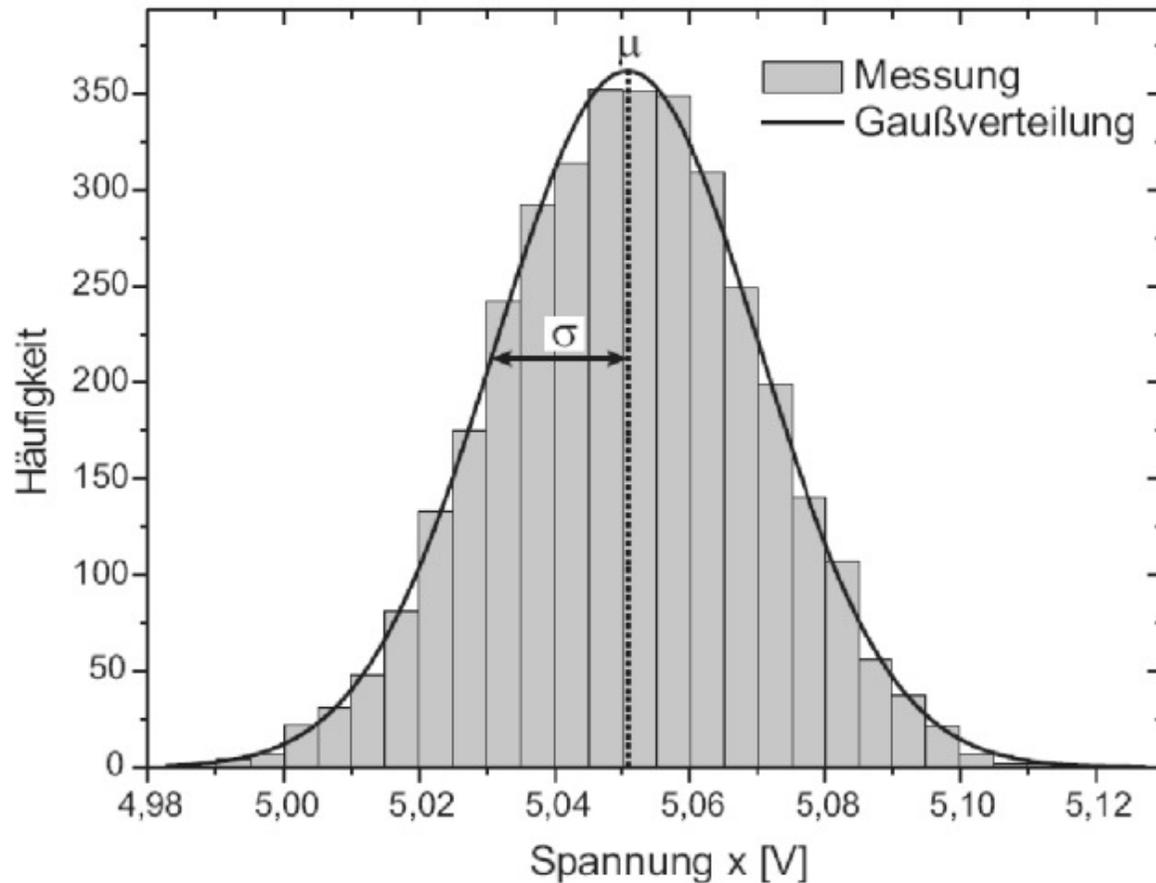
$$s_n = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Teilt man die Daten einer Messreihe in Klassen ein und stellt die Häufigkeit des Auftretens von Werten in jeder Klasse grafisch dar, so erhält man die sogenannte „**Häufigkeitsverteilung**“.

Bei Prozessen in Natur und Technik lässt diese Darstellung i. d. R. erkennen, dass die Daten normalverteilt sind.



Damit ist nun ein mathematischer Ansatz zur Auswertung der Daten möglich
-> die **Normalverteilung nach Gauß**



Der Mittelwert der Messreihe ist ein Schätzwert für den Erwartungswert μ

Die empirische Standardabweichung ist ein Schätzwert für die Standardabweichung

σ

Normalverteilung (nach Gauß):

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Normalverteilung nach Gauß

$$\mu := 10 \quad \sigma := 2$$

$$x := \mu - \sigma - 5, \mu - \sigma - 4.5 \dots \mu + \sigma + 5$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$P(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{\left[\frac{-(\mu-x)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right]}$$

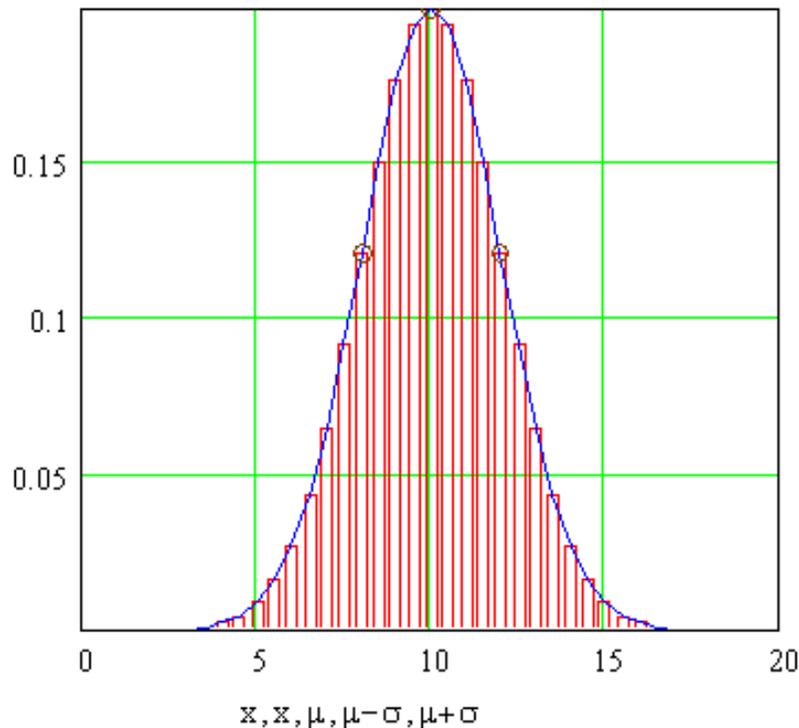
$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{\left[\frac{-(\mu-x)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right]} dx = 68.3\%$$

$$\int_{\mu-2 \cdot \sigma}^{\mu+2 \cdot \sigma} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{\left[\frac{-(\mu-x)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right]} dx = 95.4\%$$

$$\int_{\mu-3 \cdot \sigma}^{\mu+3 \cdot \sigma} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{\left[\frac{-(\mu-x)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right]} dx = 99.7\%$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot e^{\left[\frac{-(\mu-x)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right]} dx = 100\%$$

- $P(x)$
- $\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}}$
- $P(x)$
- $P(\mu)$
-
- $P(\mu-\sigma)$
-
- $P(\mu+\sigma)$
-



Das Ereignis (hier: Der "wahre Wert") liegt mit nn% Wahrscheinlichkeit innerhalb der angegebenen Grenzen.

Wie rechnet man mit Fehlern?

- Einzelmessung -> Fehlerabschätzung -> Fehlerfortpflanzung
- Messreihe -> statistische Auswertung -> Fehlerfortpflanzung

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \dots}$$

Bsp.: Berechnung des Widerstandes nach Messung von U und I

Gemessen: $U := 4.524 \cdot V$ $I := 12.67 \cdot mA$

Fehlerangaben: $\Delta U := 0.025 \cdot V$ $\Delta I := 0.08 \cdot mA$

Berechnung des Widerstandes:

$$R := \frac{U}{I}$$

$$R = 357.1 \Omega$$

Ermittlung des absoluten Fehlers durch Berechnung des totalen Differentials. Dabei wird die **Berechnungsgleichung nach jeder der darin vorkommenden fehlerbehafteten Größe abgeleitet.**

Der absolute Fehler wird dann gemäß der Gleichung auf Seite 21 dargestellt .

Fehlerabschätzung:

nach Gauß

linear

Absoluter Fehler:

$$\Delta R_G := \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot \Delta U\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2} \cdot \Delta I\right)^2}$$

$$\Delta R_G = 3.0 \Omega$$

$$\Delta R_L := \left| \frac{1}{I} \cdot \Delta U \right| + \left| \frac{U}{I^2} \cdot \Delta I \right|$$

$$\Delta R_L = 4.2 \Omega$$

Relativer Fehler:

$$f_G := \frac{\Delta R_G}{R}$$

$$f_L := \frac{\Delta R_L}{R}$$

$$f_G := \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot \Delta U\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2} \cdot \Delta I\right)^2}}{R}$$

$$f_G = 8.4 \times 10^{-3}$$

$$f_G = 0.84\%$$

$$f_L := \frac{\left| \frac{1}{I} \cdot \Delta U \right|}{R} + \frac{\left| \frac{U}{I^2} \cdot \Delta I \right|}{R}$$

$$f_L = 0.012$$

$$f_L = 1.2\%$$

Wie rechnet man mit Fehlern?

Häufig anzutreffende Fälle:

Funktion	Messunsicherheit des Mittelwertes (Gauß)	Messunsicherheit des Mittelwertes (linear)
$Z = X + Y$ $Z = X - Y$	$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y $
$Z = C \cdot X \cdot Y$ $Z = C \cdot \frac{X}{Y}$	$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\frac{\Delta z}{z} = \left \frac{\Delta x}{x}\right + \left \frac{\Delta y}{y}\right $
$Z = C \cdot X^\alpha \cdot Y^\beta$	$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\beta \cdot \frac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\frac{\Delta z}{z} = \left \alpha \cdot \frac{\Delta x}{x}\right + \left \beta \cdot \frac{\Delta y}{y}\right $

Bsp.: Berechnung des Widerstandes nach Messung von U und I

Gemessen: $U := 4.524 \text{ V}$ $I := 12.67 \text{ mA}$

Fehlerangaben: $\Delta U := 0.025 \text{ V}$ $\Delta I := 0.08 \text{ mA}$

Berechnung des Widerstandes:

$$R := \frac{U}{I}$$

$$R = 357.1 \Omega$$

Man kommt u. U. auch ohne höhere Mathematik aus, wenn man für häufig auftretende Fälle die **Erkenntnisse der höheren Mathematik** nutzt (s. Tabelle S. 23).

Fehlerabschätzung:

nach Gauß

linear

Relativer Fehler:

$$f_G := \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2}$$

$$f_G = 8.4 \times 10^{-3}$$

$$f_G = 0.84\%$$

$$f_L := \left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{\Delta I}{I} \right|$$

$$f_L = 0.012$$

$$f_L = 1.2\%$$

Absoluter Fehler:

$$\Delta R_G := f_G \cdot R$$

$$\Delta R_G = 3.0 \Omega$$

$$\Delta R_L := f_L \cdot R$$

$$\Delta R_L = 4.2 \Omega$$

Wie gibt man das Ergebnis an?

- Vertrauensbereich für das Messergebnis

$$\text{Messwert von } X = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Anzahl n der Messwerte	t Vertrauensniveau (statistische Sicherheit)			
	68,3%	90,0%	95,0%	99,0%
2	1,84	6,31	12,71	63,66
3	1,32	2,92	4,30	9,93
4	1,20	2,35	3,18	5,84
5	1,15	2,13	2,78	4,60
6	1,11	2,02	2,57	4,03
7	1,09	1,94	2,45	3,71
8	1,08	1,90	2,37	3,50
9	1,07	1,86	2,31	3,36
10	1,06	1,83	2,26	3,25
15	1,04	1,77	2,14	2,98
20	1,03	1,73	2,09	2,86
30	1,02	1,70	2,05	2,76
50	1,01	1,68	2,01	2,68
100	1,00	1,66	1,98	2,63
∞	1,00	1,65	1,96	2,58

Lineare Regression

Lineare Regression (1):

Es sei bekannt, dass der Zusammenhang zwischen x und y linear ist.
Die Kurve soll durch eine Funktion des Typs $y = ax$ angenähert werden.

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i)^2$$

Die Summe der Quadrate der Abweichungen der linearen Funktion von den Messwertepaaren soll minimal werden.

$$\sum_{i=1}^n -2(y_i - a \cdot x_i) \cdot x_i = 0$$

1. Ableitung nach a = 0 -> Extremwert

$$\sum_{i=1}^n 2(x_i)^2 > 0$$

2. Ableitung nach a > 0 -> Minimum

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

Durch Umstellen der 1. Ableitung nach a kann die Gleichung der erforderlichen Geraden ermittelt werden.

Bsp.: $n := 10$ $i := 1..n$

$x_i :=$ $y_i :=$

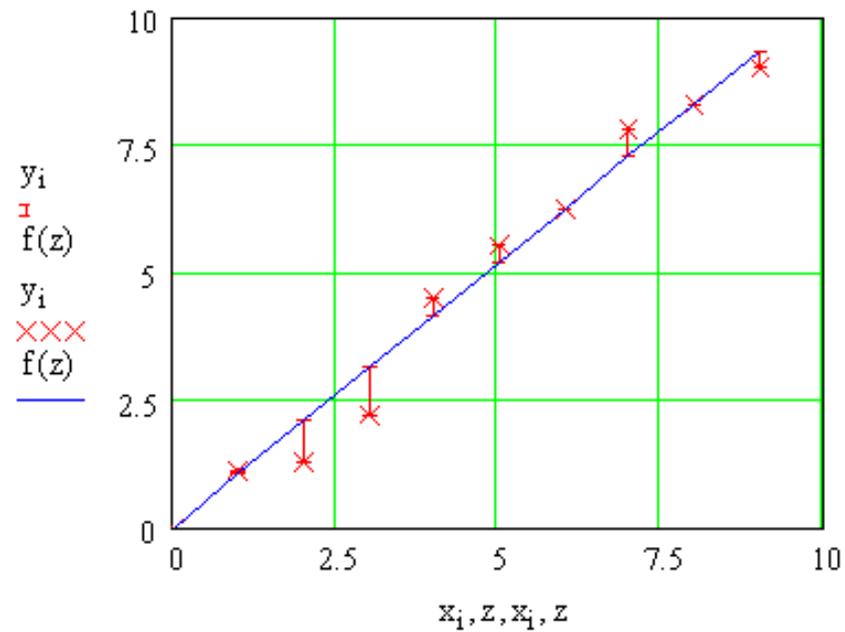
0	0
1	1.1
2	1.3
3	2.2
4	4.5
5	5.5
6	6.2
7	7.8
8	8.3
9	9

$$a := \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

$a = 1.035$

$z := 0..9$

$f(z) := a \cdot z$



Lineare Regression (2):

Es sei bekannt, dass der Zusammenhang zwischen x und y linear ist.
Die Kurve soll durch eine Funktion des Typs $y = ax + b$ angenähert werden.

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

Die Summe der Quadrate der Abweichungen der linearen Funktion von den Messwertepaaren soll minimal werden.

$$\sum_{i=1}^n [-2 \cdot x_i \cdot y_i + 2 \cdot a \cdot (x_i)^2 + 2 \cdot x_i \cdot b] = 0 \quad \text{1. Ableitung nach } a = 0 \rightarrow \text{Extremwert}$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \quad \text{Gleichung 1 des Gleichungssystems}$$

$$2 \cdot n \cdot b + \sum_{i=1}^n (-2 \cdot y_i + 2 \cdot a \cdot x_i) = 0 \quad \text{1. Ableitung nach } b = 0 \rightarrow \text{Extremwert}$$

$$n \cdot b + a \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{Gleichung 2 des Gleichungssystems}$$

$$\left[\sum_{i=1}^n 2 \cdot (x_i)^2 \right] \cdot 2 \cdot n - \left(2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 > 0 \quad \text{2. Ableitungen} > 0 \rightarrow \text{Minimum}$$

Matrix-Schreibweise des Gleichungssystems:

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}$$

Lösung mittels Cramerscher Regel:

$$\det(A) = n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

$$\det(A1) = n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\det(A2) = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Bsp.: $n := 10$ $i := 1..n$

$x_i :=$ $y_i :=$

0	0.8
1	1.6
2	1.8
3	2.2
4	4
5	4.4
6	5.7
7	6
8	6.6
9	6.8

$$a := \frac{n \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$a = 0.733$

$$b := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$b = 0.693$

$z := 0..9$

$f(z) := a \cdot z + b$

Mit Einführung der Varianz s_x^2 , der Kovarianz s_{xy} sowie der Mittelwerte für die x- bzw. y-Daten lassen sich die Gleichungen zur Berechnung von a und b auch vereinfacht schreiben:

$$x_m := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad y_m := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i$$

$$s_{xy} := \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_m) \cdot (y_i - y_m)$$

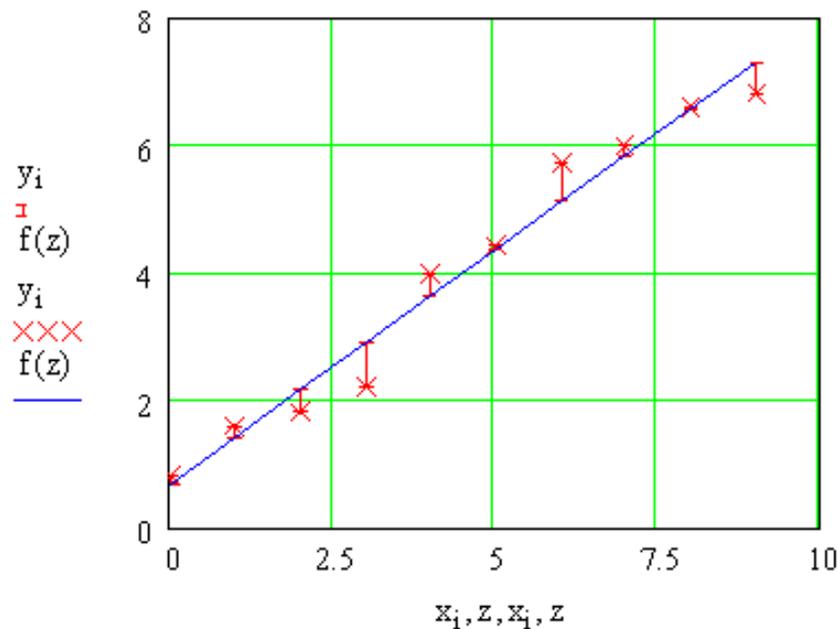
$$s_x := \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2}$$

$$a := \frac{s_{xy}}{s_x}$$

$a = 0.733$

$$b := y_m - a \cdot x_m$$

$b = 0.693$



Korrelation

Mit dem **Korrelationskoeffizienten r** einer zweidimensionalen Stichprobe beschreibt man den "**Grad des linearen Zusammenhangs**" der Daten.

Der Korrelationskoeffizient r ist eine dimensionslose Zahl, die zwischen -1 und +1 liegen kann. Bei r = +1 liegen die Daten auf einer Geraden mit positivem Anstieg. Bei r = -1 liegen sie auf einer Geraden mit negativem Anstieg. In allen anderen Fällen streuen die Wertepaare mehr oder weniger deutlich.

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

mit

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m) \cdot (y_i - y_m) \quad \text{Kovarianz}$$

+

x_m, y_m - Mittelwerte der Daten

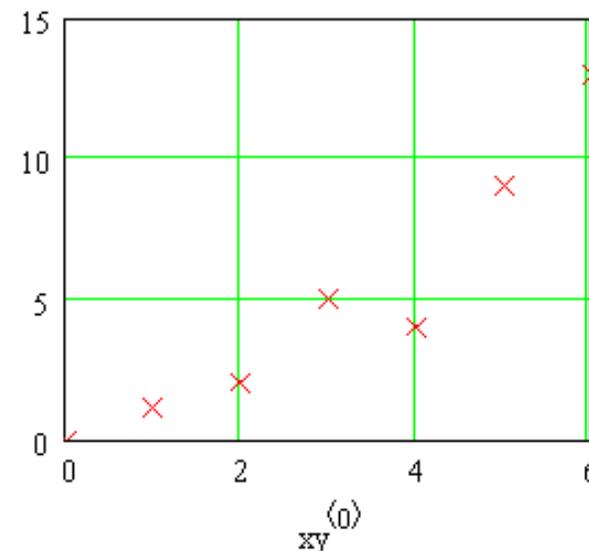
s_x, s_y - empir. Standardabweichung der Daten

Bsp: $xy :=$

	0	1
0	0	0
1	1	1.1
2	2	2
3	3	5
4	4	4
5	5	9

$$\text{korr}(xy^{(0)}, xy^{(1)}) = 0.941$$

$xy^{(1)}$
XXXX



"Zu Fuß":

$n := 6$ $i := 1..n$

$x_i :=$ $y_i :=$

1	2
2	4
3	8
4	12
5	15
6	16

$$x_m := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad x_m = 3.5$$

$$y_m := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad y_m = 9.5$$

$$s_x := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2} \quad s_x = 1.871$$

$$s_y := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - y_m)^2} \quad s_y = 5.788$$

$$s_{xy} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m) \cdot (y_i - y_m) \quad s_{xy} = 10.7$$

$$r := \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

$$r = 0.988$$

Mit Mathcad-Funktionen:

$xy :=$

	0	1
0	1	2
1	2	4
2	3	8
3	4	12
4	5	15
5	6	16

$$\text{korr}(xy^{(0)}, xy^{(1)}) = 0.988$$

Weitere Beispiele:

xy1 :=

	0	1
0	1	1
1	2	4
2	3	7
3	4	10
4	5	13
5	6	16

$$\text{korr}(xy1^{(0)}, xy1^{(1)}) = 1$$

xy2 :=

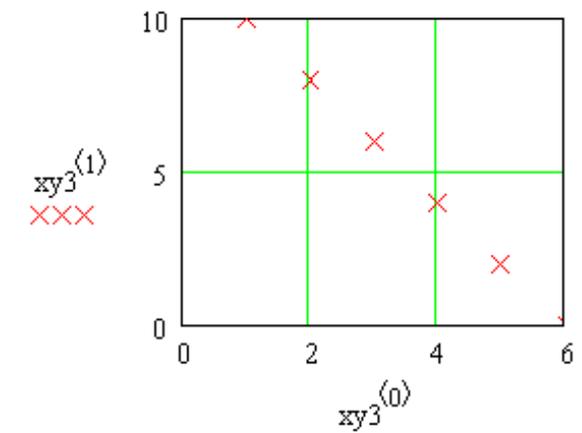
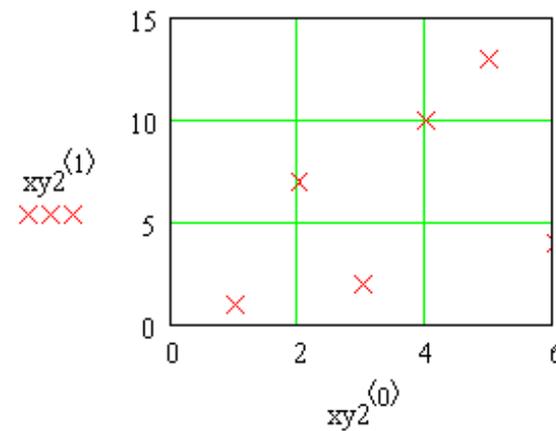
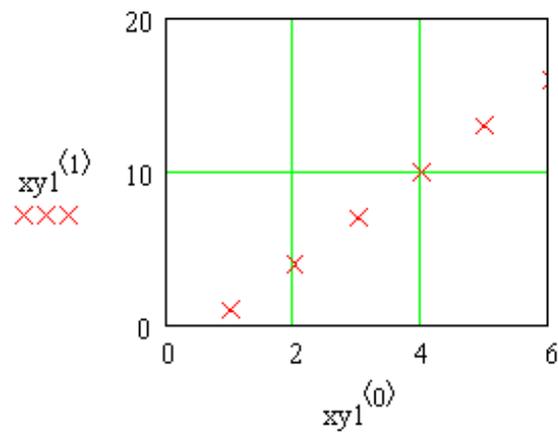
	0	1
0	1	1
1	2	7
2	3	2
3	4	10
4	5	13
5	6	4

$$\text{korr}(xy2^{(0)}, xy2^{(1)}) = 0.465$$

xy3 :=

	0	1
0	1	10
1	2	8
2	3	6
3	4	4
4	5	2
5	6	0

$$\text{korr}(xy3^{(0)}, xy3^{(1)}) = -1$$



Quellenverzeichnis:

/1/ Papula, L.:

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Bd. 2/3,
5. Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden 2008

/2/ Schimpf, U., Wagner, J., Knöpfle, K. T.:

FehlerSS08_Folien.pdf,
Uni Heidelberg, 2008

/3/ Reisinger, Heinrich:

Signifikante Stellen bei Zahlenwerten einer physikalischen Größe,
FH Wiesbaden, 2002

/4/ PTB-Mitteilungen 117, Heft 2, 2007

Die zugehörigen Mathcad-Dateien ermöglichen einen interaktiven Umgang mit den entsprechenden mathematischen Zusammenhängen.